בחינה באלגברה 1 מ' -104016- חורף תשס"ד - מועד ב'

שם משפחה:		שם פרטי:	
מס. סטודנט:		פקולטה:	

קרא בעיון את כל ההוראות:

- משך הבחינה **שלוש שעות** . אין להשתמש בחומר עזר.
- במבחן 4 שאלות. יש לפתור את כל 4 השאלות.
- יש לענות על השאלות בצורה מסודרת ויש לנמק כל תשובה.
  יורדו נקודות על כתיבה מרושלת. **תשובה בלתי מנומקת לא תחשב.**
- יש לרשום את תוצאות החישובים במשבצות המיועדות לכך, המופיעות מיד אחרי השאלות. תוצאה שתרשם במקום אחר לא תחשב !
- יש לבצע את כל החישובים וההוכחות בתוך המחברות ולמחוק בבירור טיוטות.

ב ה צ ל ח ה !

שאלות	ציון
שאלה מס' 1	
שאלה מס' 2	
שאלה מס' 3	
שאלה מס' 4	
סה"כ	

<u>שאלה מס. 1</u> : (25 נקודות)

יהי V מרחב הפולינומים ממעלה ≥ 2 מעל המרוכבים.
יהיו $p_1(x)=x^2+1$, $p_2(x)=x$, $p_3(x)=1$ ויהי $f=\left(p_1(x)\,,p_2(x),\,p_3(x)\right)$
בסיס סדור של V. תהי $T:V\to V$ טרנספורמציה ליניארית המקיימת

$$[T]_f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

יהי $e=(x^2\,,\,x\,,1)$ בסיס סדור של V.

א. מצא את $[T]_e$.

ב. מצא את $T\left(3x^2+2x+1\right)$.

ג. יהי $p(x)\in V$ פולינום המקיים $[p(x)]_f=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. מצא את $[T\left(p(x)\right)]_e$.

ד. הוכח שאם מתקיים $[T]_f^t=\left([T]_f\right)^2-[T]_f+I_3$, כאשר $[T]_f^t$ היא המטריצה המוחלפת של $[T]_f$.

אז $[T^2]_e$ דומה למטריצה סימטרית.

<u>ריכוז תשובות</u> :

$[T]_e=$	$T\left(3x^2+2x+1\right)=$	$[T\left(p(x)\right)]_e=$
א.	ב.	ג.

<u>שאלה מס. 2</u> : (30 נקודות)

א. תהי A מטריצה $n\times n$ מעל המרוכבים, $n\geq 3$ ויהיו λ ו- μ ערכים עצמיים שונים של A. יהיו v_1 ו- v_2 וקטורים עצמיים בלתי תלויים ליניארית של A המתאימים ל- λ ויהי v_3 וקטור עצמי של A המתאים ל- μ. הוכח ש- $\{v_1, v_2, v_3\}$ היא קבוצה בלתי תלויה ליניארית.

ב. תהי $A=\begin{pmatrix} z & -1 & -1 \\ 2 & -2z & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ מטריצה מרוכבת, כאשר z הוא פרמטר מרוכב.
מצא את כל הערכים של z עבורם 0 הוא ערך עצמי של A.

ג. תהי $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ מטריצה ממשית. מצא את הפולינום האופייני, הערכים העצמיים, הוקטורים העצמיים, הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי, הריבוי הגיאומטרי של כל ערך עצמי והוקטורים העצמיים עבור כל ערך עצמי של B.

ד. הוכח ש- B ניתנת ללכסון ומצא מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש- $P^{-1}BP=D$.

ה. מצא את הערכים העצמיים של C, כאשר $C=2B^2+5B-12I_3$.

<u>ריכוז תשובות</u> :

ב.

$z=$

ג.

הפולינום האופייני

λ	ריבוי אלגברי	ריבוי גיאומטרי

וקטורים עצמיים

ד.

$P =$

$D =$

ה.

הערכים העצמיים של C

<u>שאלה מס. 3</u> : (20 נקודות)

יהי $V=C^3$ מרחב מכפלה פנימית מעל C עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית

$$<\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}> = x_1\bar{x}_2 + y_1\bar{y}_2 + z_1\bar{z}_2$$

יהי $W=S_p\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ תת מרחב של V.

א. מצא בסיס אורתונורמלי של W.

ב. מצא את ההיטל האורתוגונלי של $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ על $W^{\perp}$.

ג. מצא את ההיטל האורתוגונלי של $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ על W.

ד. האם קיים וקטור $v \in V$ בעל אורך 1 (כלומר $\|v\|=1$) כך שההיטל של v על W וההיטל של v על $W^{\perp}$ הם בעלי אותו אורך ?

<u>ריכוז תשובות</u>

בסיס אורתונורמלי ל- W	
ההיטל האורתוגונלי של $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ על $W^{\perp}$	
ההיטל האורתוגונלי של $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ על W	

א. ב. ג.

כן	לא

ד.

<u>שאלה מס. 4 (25 נקודות)</u>

א. יהיו V ו W מרחבים וקטוריים ממשיים ממימד סופי ותהי T טרנספורמציה ליניארית $T:V\to W$. יהיו $v_1,\dots,v_n\in V$.
הוכח שאם T היא חד-חד-ערכית ו $\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}$ הוא בסיס של W אז $\{v_1,\dots,v_n\}$ הוא בסיס של V.

ב. יהי $V=R^n$ עם המכפלה הפנימית הרגילה

$$<\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_n\end{pmatrix}>=x_1y_1+x_2y_2+..+x_ny_n$$

יהיו u ו v וקטוריים בלתי תלויים ליניארית ב- V. נסמן $W=Sp\{u+v\ ,\ u-v\}$.
הוכח שאם קיים וקטור $w\neq 0$ ב- $W^{\perp}$ אז $n\geq 3$.
(n הוא המימד של V).

ג. תהי A מטריצה ממשית $n\times n$ שבה $a_{ii}=2$ עבור $i=1,\dots,n$ ו- $a_{ij}=1$ עבור $i\neq j$, $1\leq i\ ,\ j\leq n$. חשב את $\det(A)$.

ד. הוכח או הפרך : אם A היא מטריצה הפיכה מסדר $2\leq n$ אז $A^t+A\neq 0$.

ה. תהיינה
$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&2\\1&2&1\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&-1&1\\-2&-2&2\end{pmatrix}$$

האם A ו B שקולות שורה ? האם A ו B דומות ?

<u>ריכוז תשובות</u>

$\det(A)=$

ג.

לא	כן

A ו B דומות

לא	כן

A ו B שקולות שורה

ה.